مقدمة علم التحريك

م.غيث برهاني

RBO HAMAK

التحريك

المسألة الرابعة: (ملحق للمحاضرة الأولى):

تتحرك سيارة كتلتها $m = 1400\ kg$ على طريق

منحني منبسط يقع في مستوي أفقي بحيث تنخفض سرعتها

بمعدل ثابت (اي الحركة متباطئة بانتظام),

فكانت السرعة في الموقع B: $v_B = 75\ km/h$

نصف قطر التقوس في تلك اللحظة $\rho_B = 350\ m$

إلى سرعة $v_D = 45\ km/h$

في الموقع *D* وكان نصف قطر التقوس $\rho_D = 45\ m$

المطلوب: أوجد موضحا بالرسم القوة الافقية (الكلية) المسلطة على دواليب السيارة في كل من الموقع *C,D,B* علما ان المسافة بين *B* و *D* هي $\Delta s = 250\ m$ وان *C* تمثل نقطة انعطاف يتغير فيها مسار المنحن.

الحل:

لإيجاد القوة المطبقة في الموقع B نطبق العلاقة الأساسية في التحريك ونسقطها على الناظم والمماس حيث:

$$\Sigma\overrightarrow{F_B} = m.\overrightarrow{A_B}$$

القوة الأفقية هي قوة كلية (اي محصلة قوى المماسيةوالناظمية لأن مسار الجسيم منحني) :

$$\vec{F}_B = m.\vec{A}_B$$

بإسقاط العلاقة على المماس: $F_B^t = m.A_B^t$

وبإسقاط العلاقة على الناظم: $F_B^n = m.A_B^n$

لدينا:
$$A_B^n=\frac{v_B^2}{\rho_B}=\frac{\left(\frac{75*1000}{3600}\right)^2}{350}$$
$$A_B^n=1.236\,m.s^{-2}$$

ملاحظة: لاتنسى تحويل واحدة v: $1\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)=\frac{1*1000}{3600}\left(\frac{m}{s}\right)$

ومنه: $\text{F}_\text{B}^n=m.A_B^n=1400*1.236=1730.4\,N$

لحساب F_B^t نقوم بحساب A_B^t عن طريق معادلات الحركة المتغيرة بانتظام:
$$v_D^2-v_B^2=2A_B^t.\Delta s$$
$$\Longrightarrow\quad A_B^t=\frac{v_D^2-v_B^2}{2\Delta s}=\frac{(45)^2-(75)^2}{2*250}=-7{,}2\,m/s^2$$

ومنه: $\text{F}_\text{B}^t=m.A_B^t=1400*(-7.2)=-10080\,N$

ملاحظة: الإشارات السالبة تدل على أن الجهة الحقيقية عكس الجهة المفروضة.

$$\text{F}_\text{B}=\sqrt{F_t^2+F_n^2}=\sqrt{(-10080)^2+(1730.4)^2}=10227\text{ N}$$

حساب القوة عند النقطة D: نطبق العلاقة الاساسية في التحريك على النقطة D في اللحظة الزمنية المدروسة حيث:
$$\overrightarrow{\Sigma F_D}=m.\vec{A}_D$$

بإسقاط العلاقة على المماس: $F_D^t=m.A_D^t$

وبإسقاط العلاقة على الناظم: $F_D^\text{n}=m.A_D^n$

لدينا: $A_D^n=\frac{v_D^2}{\rho}=\frac{\left(\frac{45\times 1000}{3600}\right)^2}{45}=3.47\,m.s^{-2}$

(ولأن الحركة تتغير بمعدل ثابت) $A_D^t=A_B^t=A_C^t=A^t$

ومنه: $F_D^t=m.A_D^t=1400*(-7.2)=-10080\,N$

وايضا: $F_D^\text{n}=m.A_D^n=1400*3.47=5222\,N$

فتكون: $F_\text{D}=\sqrt{(F_D^t)^2+(F_D^n)^2}=\sqrt{(5222)^2+(-10800)^2}$
$$=11352.34\,\text{m.s}^{-2}$$

_ حساب F_C: بما ان C نقطة انعطاف $\Longleftarrow A_C^n=0$ لأن $\rho\longrightarrow\infty$

$$\Rightarrow A_C^n = \frac{v_C^2}{\rho_C} = \frac{v_C^2}{\infty} = 0$$

وبالتالي $F_C^n = 0 \Leftarrow F_C = F_C^t = m.A_C^t$

$$\Rightarrow F_C = 1400 * (-7.2) = -10800\ N$$

مسائل النوع الثاني:

المسألة الاولى: حركة الجسيم مقيدة, المسار مستقيم, القوة ثابتة)

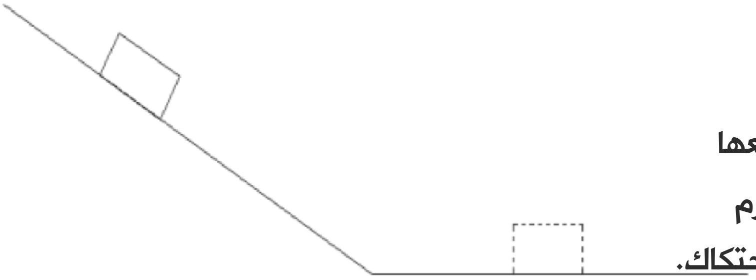
نص المسألة: يبدأ جسيم وزنه W بالانزلاق من السكون

من الموقع A على مستو مائل خشن AB

معامل احتكاكه $\mu = 0.3$ أوجد المسافة Δx التي يقطعها

الجسم على المستوي BC حتى لحظة وقوفه والزمن اللازم

(الكلي)للحركة علما ان (*BC* خشن) وله نفس معامل الاحتكاك.



الحل:

لايجاد Δx ندرس حركة الجسيم من A الى B وباعتبار الحركة متسارعة بانتظام (فسر؟)

(لان التسارع يتناسب مع القوة طردا فعندما تكون القوى ثابتة يكون التسارع ثابت)

وعلى هذا الاساس:

$$A = const \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 2A_{AB}.l \dots 1$$

لدينا في هذه المعادلة: (انطلقت من السكون) $v_B = 0$

$$l = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = 15\ m$$

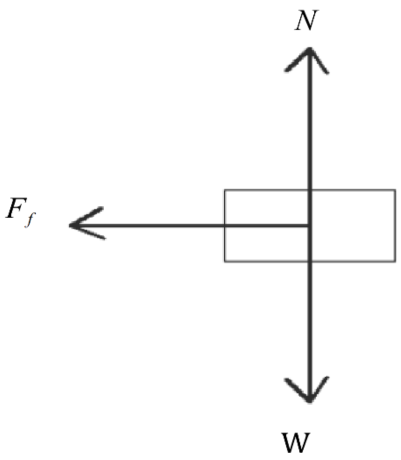
لإيجاد A_{AB} نطبق العلاقة الاساسية في التحريك اثناء حركته من A الى B بعد تحرير الجسيم :

$$\vec{\Sigma}\mathrm{F} = m.\vec{A}_{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_f + \vec{N} + \vec{W} = m.\vec{A}$$

بما ان الحركة انسحابية للتسارع مركبة واحدة منحاها على منحى الحركة:

وبإسقاط العلاقة على منحى موازي لمنحى التسارع وبجهته:



$$-F_f + W.sin\alpha = m.A$$

ولكن لدينا: $(W = m.g)$, $(F_{f=}\mu.N)$

فيكون: $_\mu.N + m.g.sin\alpha = m.A$

لايجاد N نسقط على منحى عمودي على منحى الحركة وبجهته:

$$N - W.cos\alpha = 0 \Rightarrow N = W.cos\alpha = m.g.cos\alpha$$

نعوض العلاقة السابقة:

$$\mu.\text{m.g.}\cos\alpha + m.g.sin\alpha = m.A$$

باختصار m:

$$A = g.sin\alpha - \mu.g.cos\alpha$$

$$\text{A} = (9.81)\left(\frac{9}{15}\right) - (0.3)(9.81)\left(\frac{12}{15}\right) = 3.53\ \text{m.s}^{-2}$$

ومنه حسب العلاقة 1:

$$v_B^2 = 2A_{AB}.l \Rightarrow v_B = \sqrt{2A_{AB}.l} = \sqrt{2 * 3.53 * 15}$$

$$v_B = 10.3\ m.s^{-1}$$

ومن معادلات الحركة المتسارعة نحسب الزمن:

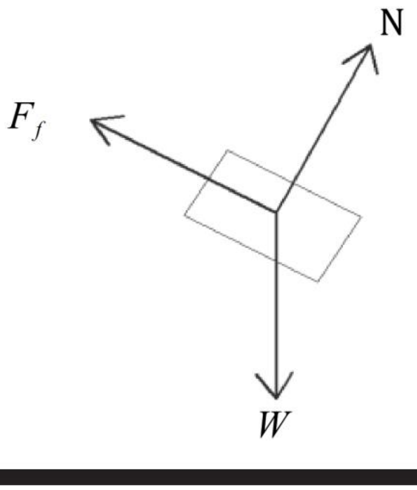
$$A_{AB} = const \Rightarrow v_B = A_{AB}.t \Rightarrow t_1 = \frac{v_B}{A_{AB}} = 2.9\ S$$

في القسم الثاني من الحل نقوم بنفس الخطوات على المسار BC باعتبار ان الحركة متباطئة بانتظام تنتهي الى السكون في C

فنطبق العلاقة الاساسية في التحريك على الجسيم في نقطة على المسار BC: $\Sigma\vec{F} = m.\vec{A}_{BC}$

$$\vec{W} + \vec{N} + \vec{F_f} = m.\vec{A}_{BC}$$

نسقط على منحى الحركة وبجهتها:



$$-F_f = -m.A_{BC} \Longrightarrow F_f = m.A_{BC} \Longrightarrow \mu.N = m.A_{BC} \dots 2$$

نسقط على منحى عمودي على منحى الحركة:

$$-W + N = 0 \ \Longrightarrow N = W = m.g \dots 3$$

من 2 و 3 :

$$\mu.m.g = m.A_{BC} \Longrightarrow A_{BC} = \mu.g = 2.94\ m.s^{-2}$$

بما ان الحركة متغيرة بانتظام: $A = const$

$$\Longrightarrow \ v_C^2 - v_B^2 = -2A_{BC}.\Delta x$$

(الإشارة السالبة لان التسارع بعكس جهة المحور الموجب)

ولدينا: (تنتهي الى السكون في C) $v_C = 0$

$$\Longrightarrow \ \Delta x = -\frac{v_B^2}{-2A_{BC}} = 18.04\ m$$

ومن التسارع الثابت ايضا: $A_t = const$

$$\Longrightarrow v_C - v_B = -A_{BC}.t \ \Longrightarrow t_2 = \frac{v_B}{A_{BC}} = \frac{10.3}{2.94}$$

$$\Longrightarrow t_2 = 3.5\ sec$$

ومنه: الزمن الكلي: $t = t_1 + t_2 = 3.5 + 2.9 = 6.4\ sec$

تذكرة بمعادلات الحركة ذات التسارع الثابت

$$A = const = C$$

$$\frac{dv}{dt} = C \ \Longrightarrow dv = C.dt$$

بتكامل العلاقة: $\int_{v_0}^{v} dv = C\int_{t_0}^{t} dt \ \Longrightarrow v - v_0 = C.t \dots 1$

ومنه: $\frac{ds}{dt} = C.t + v_0$

$$ds = (C.t + v_0)dt \Longrightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (C.t + v_0)dt$$

$$s - s_0 = \frac{1}{2} C.t^2 + v_0.t \ldots 2$$

ومن العلاقة 1:
$$\frac{dv}{dt} = C$$

نضرب ونقسم على ds:
$$\frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} = C$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{ds}.v = C \ \Rightarrow v.dv = c.dx$$

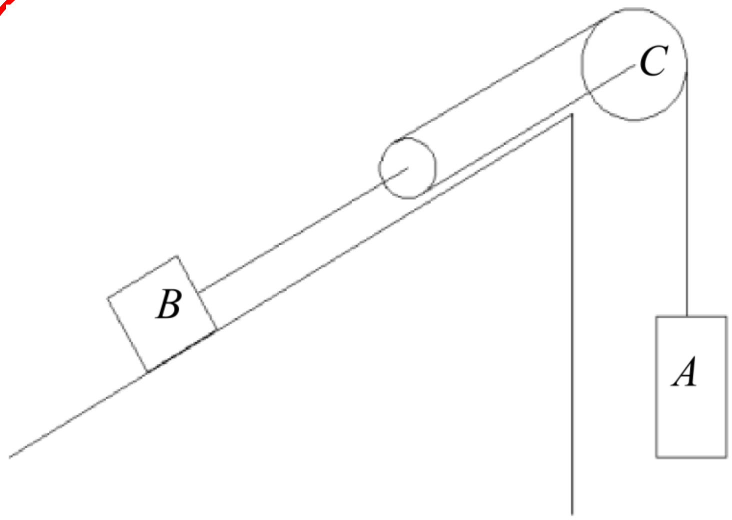
$$\int_{v_0}^{v} v.dv = \int_{s_0}^{s} C.ds \ \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = C(s - s_0)$$

$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2C.\Delta s \ldots 3$$

عندما يكون التسارع بعكس جهة المحور نضرب التسارع بإشارة سالبة .

يعني حسب المسالة التي امامنا بحيث يبدا الجسيم من A ثم الى B بعدها يتوقف عند C ويدل ذلك الى تناقص التسارع حتى يتوقف الجسيم عند الحاجز C.

المسألة الثانية: (دورة امتحانية)



نص المسألة: يبدأ الجسيم B وكتلته $m = 450\ kg$

حركته من السكون نحو اسفل المستوي الاملس بتسارع

ثابت حيث يميل المستوي بزاوية $\alpha = 30°$

وينزلق الجسيم عليه ليرفع جسيم آخر A

كتلته $m = 100\ kg$ عبر البكرة *C*

مهملة الكتلة والمستوي أملس

المطلوب:

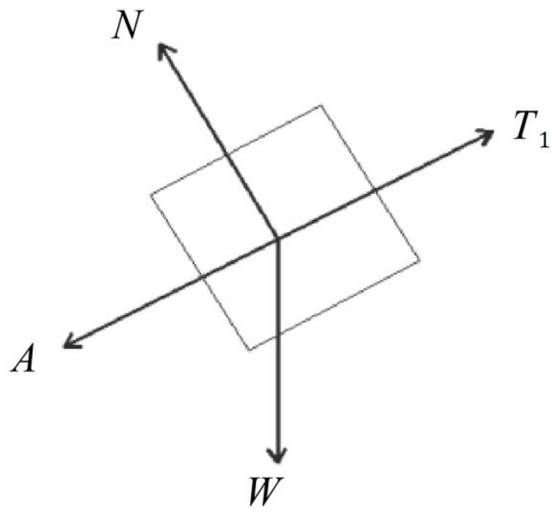
التسارع الخطي والقوة المؤثرة لكل من الجسيمين _ شرط الحركة.

الحل:

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم B الذي يتحرك حركة انسحابية في اللحظة المدروسة وبعد تحريره :

$$\Sigma \vec{F}_B = m_B.\vec{A}_B \ \Rightarrow \vec{W}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 = m_B.\vec{A}_B$$

بإسقاط العلاقة على منحى موازي لمنحى الحركة وبجهتها (نحو الأسفل):



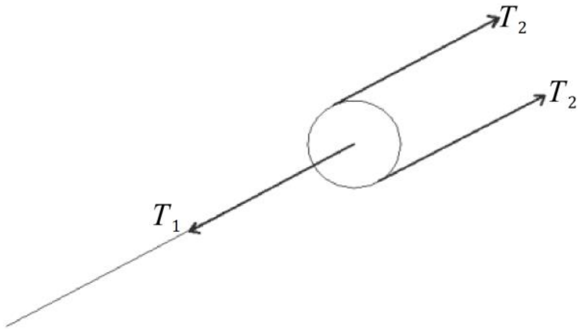
$$-T_1 + W_1.sin\alpha = m_B.A_B \dots 1$$

وباسقاط العلاقة الشعاعية على منحى عمودي على منحى الحركة وبجهته(نحو الاعلى):

$$N_1 - W_1.cos\alpha = 0 \implies N_1 = W_1.cos\alpha \dots 2$$

نلاحظ ان المعادلات غير كافية لإيجاد التسارع فنتعمق جيدا في المعطيات......... يوجد لدينا بكرة ثابتة مهملة الكتلة (متوازنة):

نطبق عليها قانون التوازن:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \implies \vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 = 0$$

بالإسقاط على منحى موازي لمنحى الحركة وبجهتها

$$T_1 - 2T_2 = 0 \implies T_1 = 2T_2 \dots 3$$

حتى الآن مازالت المعادلات غير كافية لأن عدد المجاهيل 4 *وعدد المعادلات* 3 ......بالعودة لقوانين الحركات الغير مستقلة:

$$\Delta y_A + 2\Delta y_B = 0$$

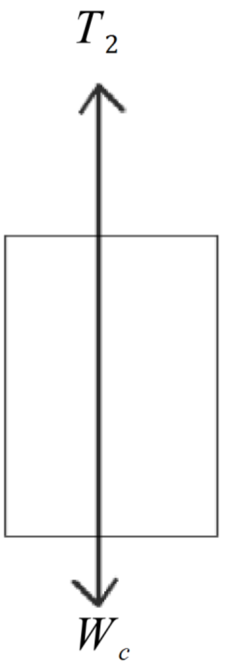
بالاشتقاق:
$$v_A + 2v_B = 0$$

بالاشتقاق:
$$A_A + 2A_B = 0$$

$$\Rightarrow \; A_A = -2A_B \ldots 4$$

ملاحظة: نعوض التسارع في القانون الأخير كما هو من غير اشارة سالبة أي: $A_A = 2A_B$

والآن نطبق العلاقة الاساسية في التحريك على الجسيم **A** في اللحظة المدروسة:



$$\Sigma \vec{F}_A = m_A . \vec{A}_A \Rightarrow \vec{W}_2 + \vec{T}_2 = m_A . \vec{A}_A$$

نسقط العلاقة على منحى موازي لمنحى الحركة متجه نحو الأعلى:

$$-W_2 + T_2 = m_A . A_A \ldots 5$$

والآن بنسب العلاقتين *1* و *5*

$$\frac{m_B . A_B}{m_A . A_A} = \frac{W_1 . sin\alpha - T_1}{-W_2 + T_2}$$

والآن نعوض العلاقات الأخرى:

$$T_1 = 2T_2 \quad , \quad 2A_B = A_A \quad , \quad W_1 = m_B . g \quad , \quad W_2 = m_A . g$$

فتصبح العلاقة:

$$\frac{m_B . A_B}{m_A . 2A_B} = \frac{m_B . g . sin\alpha - 2T_2}{-m_A . g + T_2}$$

$$\Rightarrow (-m_A . g + T_2). m_B = (m_B . g . sin\alpha - 2T_2) 2m_A$$

$$\Rightarrow \; -m_A . g . m_B + m_B . T_2 = 2m_A . m_B . g . sin\alpha - 4m_A . T_2$$

$$\Rightarrow T_2 (4m_A + m_B) = 2m_A . m_B . g . sin\alpha + m_A . m_B . g$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{g . m_A . m_B (2 . sin\alpha + 1)}{4m_A + m_B}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{9.81(450)(100)(2 \sin(30) + 1)}{4(100) + 450} = 1038.7 \; N$$

$$T_1 = 2T_2 = 2(1038.7) = 2077.4 \; N$$

ومن العلاقة 5:

$$A_A = \frac{T_2 - W_2}{m_A} = \frac{T_2 - m_A.g}{m_A} = 0.577\, m.s^{-2}$$

ومن العلاقة 4: $A_A = 2A_B = 2 * 0.577$

$$A_A = 1.154\, m.s^{-2}$$

شرط الحركة(الطلب الثاني):

$$A_A > 0 \Rightarrow -\frac{W_2 + T_2}{m_A} > 0$$

$$\Rightarrow \quad T_2 > W_2 \Rightarrow T_2 > m_A.g$$

$$\Rightarrow 1038.7 > 100 * 9.81$$

شرط الحركة الثاني: $A_B > 0 \Rightarrow \frac{-T_1 + W.sin\alpha}{m_B} > 0$

$$\Rightarrow \quad -T_1 + W_1.sin\alpha > 0 \Rightarrow W_1.sin\alpha > T_1$$

$$\Rightarrow 2077 < m_B.g.sin\alpha$$

$$\Rightarrow 2077 < 450 * 9.81 * sin30$$

$$2077 < 2207$$

إذاً شروط الحركة محققة.